Abstrakt: Mit Hilfe der Planck Konstanten Länge, Zeit, Masse und Beschleungigung wird gezeigt, dass sich eine Quantengravitation für die Kosmologie aufbauen lässt. Dieses Papier zeigt wie Einstein's Feldgleichungen in Friedmann Robertson Walker Metrik den Planck Ära Kontext auflösen.

1 Die Planck Konstanten

Planck Länge $\Delta x = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$

Planck Zeit $\Delta t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$

Planck Masse $\Delta m = \sqrt{\frac{hc}{G}}$

Planck Beschleunigung $\Delta a = \frac{c}{\Delta t} = \sqrt{\frac{c^7}{hG}}$

2 Moderne Kosmologie

In der modernen Kosmologie werden die Einsteinschen Feldgleichungen mit dem sogenannten kosmologischen Glied Λ wie folgt geschrieben (siehe [2] und [3]):

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \quad (2.0)$$

Die Lösungen der Feldgleichungen in Friedmann-Robertson-Walker-Metrik lauten dann:

FRW Gleichung (I)

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \quad (2.1)$$

FRW Gleichung (II)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad (2.2)$$

Doch Einstein bezeichnete schon zu Lebzeiten das kosmologische Glied Λ als 'die grösste Eselei' seines Lebens. Daher wollen wir uns die Feldgleichung in der ursprünglichen Form von 1917 ansehen (siehe [1]):

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \quad (2.3)$$

Einstein bekam damals die Lösungen wie folgt heraus:

$$\frac{1}{R^2} = 0 \quad (2.4)$$

und

$$\frac{1}{R^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho c^2}{\Delta F} \quad (2.5)$$

Wobei hier die Planck Kraft mit $\Delta F = \frac{c^4}{G}$ gesetzt wird. Einstein nahm damals ein druckfreies Universum an, also einen Energie-Impuls-Tensor gleich:

$$diag\{\rho c^2, 0, 0, 0\} \quad (2.6)$$

Wenn wir aber im Gegensatz zu Einstein ein Universum mit Druck annehmen, dann sieht der Energie-Impuls-Tensor wie folgt aus:

$$diag\{\rho c^2, p, p, p\} \quad (2.7)$$

Daher sieht dann aber die Einsteinsche Lösungsgleichung (2.4) wie folgt aus:

$$\frac{1}{R^2} = 8\pi \frac{p}{\Delta F} \quad (2.8)$$

Der Vergleich mit Lösungsgleichung (2.5) erzwingt folgende Relation:

$$\frac{\rho c^2}{3} = p \quad (2.9)$$

Diese Relation gilt exakt dann, wenn das Universum als ideales Photonengas angenommen wird. Wenn wir die Einsteinsche Feldgleichung der modernen Kosmologie (2.0) in Friedmann-Roberson-Walker-Metrik ohne kosmologisches Glied Λ betrachten und den Geometriefaktor $k = 0$ setzen, dann vereinfachen sich die Gleichungen (2.1) und (2.2) zu:
FRW Gleichung (I)

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (2.10)$$

und FRW Gleichung (II)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad (2.11)$$

Mit der Relation (2.9) wird aus (2.11) wie folgt: FRW Gleichung (II)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{8\pi G\rho}{3} \quad (2.12)$$

3 Entropie und Symmetrie

Da wir nun wissen das die Energiedichte $\rho c^2 = \tilde{a}\Delta T^4 = \frac{3\Delta F}{8\pi R^2}(\tilde{a} = Strahlungskonstante)$ beträgt, können wir mit $c = h = G = k_B = 1$ wie folgt herleiten:

$$\frac{3\Delta F}{8\pi R^2} = \tilde{a}\Delta T^4 = \frac{8\pi^5}{15}T^4 \; oder \; T^4 = \frac{45}{64\pi^6}$$

Damit ergibt sich für die Plank-Temperatur $\Delta T = (\frac{45}{64\pi^6})^{1/4} = \frac{1}{6.08088337383}$
Nun ergibt sich für die Planck-Entropie ($\Delta E = Planckenergie$):

$$\Delta S = \frac{\Delta E}{\Delta T} \hat{=} 6k_B = k_B \; ld 2^6$$

daher wissen wir das 6 Informationen nötig sind um ein Universum zu beschreiben und zwar:

1. c - Lichtgeschwindigkeit
2. G - Gravitationskonstante
3. h - Plancksches Wirkungsquantum
4. k_B - Boltzmann Konstante
5. $\tilde{a} - Strahlungskonstante(\tilde{a} = \frac{4\sigma}{c} \; mit \; \sigma =$ Stefan Boltzmann Konstante)
6. Einsteinsche Feldgleichung

Oder in Symmetrie können wir in der Planck-Ära die folgenden 6 Relationen gelten lassen:

1. $\Delta m\ \Delta x = \frac{h}{c} = 2.2102e^{-42}$
2. $\Delta m\ \Delta t = \frac{h}{c^2} = 7.3725e^{-51}$
3. $\frac{\Delta m}{\Delta a} = \frac{h}{c^3} = 2.4592e^{-59}$
4. $\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{c^2}{G}$
5. $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{c^3}{G}$
6. $\Delta F = \Delta m\ \Delta a = \frac{c^4}{G}$

Wobei die Relationen 1., 2. und 3. aus der Quantenmechanik und die Relationen 4., 5. und 6. aus der Allgemeine Relativitätstheorie kommen. Nun können wir die kosmische Hintergrundstrahlung wie folgt behandeln:

$$E_\gamma = \frac{hc}{x} = 6.08088337383kT_\gamma\ mit\ T_\gamma = 2.725K$$

Daraus lässt sich ein $m_\gamma = 2.5444e^{-39}kg$ und ein $x = \lambda_\gamma = 8.6828e^{-4}m$, sowie ein $t_\gamma = \frac{\lambda_\gamma}{c} = 2.8963e^{-12}s$ errechnen. Weiters bekommen wir aus der ART:

$$R = \sqrt{\frac{3\Delta F}{8\pi\tilde{a}T_\gamma^4}} => Radius\ des\ Universums\ R = 1.861e^{28}m$$

$$\frac{M}{R} = \frac{c^2}{G} = \frac{\Delta m}{\Delta x} => Masse\ des\ Universums\ M = 2.506e^{55}kg$$

$$\frac{M}{t} = \frac{c^3}{G} = \frac{\Delta m}{\Delta t} => Alter\ des\ Universums\ t = 6.207e^{19}s$$

Für die kosmische Hintergrundstrahlung lässt sich wie folgt herleiten:

$$E_\gamma = m_\gamma ax = \frac{h\nu}{c^2}\frac{mc^3}{h}\frac{c}{\nu} = m_\gamma c^2$$

4 Modifizierte Newtonsche Dynamik

Nun wollen wir eine modifizerte Newtonsche Gleichung aufstellen die das Newtonsche Gesetz mit der Quantenmechanik verbindet.

$$\Delta F = m\ a + \frac{\Delta m}{\Delta a}\ \frac{a^2}{2} = m\ a + \frac{h}{c^3}\ \frac{a^2}{2}$$

In der Planck-Ära ergibt sich:

$$\Delta F = \Delta m\ \Delta a + \frac{\Delta m}{\Delta a}\ \frac{\Delta a^2}{2} = \frac{3c^4}{2G}$$

Weiters ergibt sich die Planck-Leistung ΔP zu:

$$\Delta P = \Delta F\ \frac{c}{4} = \frac{3c^5}{8G} = 4\pi R^2 \sigma T_\gamma^4$$

5 Referenzen

1. A.Einstein, Über das sogenannte kosmologische Problem

   $http://www.alberteinstein.info/db/ViewImage.do?DocumentID = 34123\&Page = 1$

2. V.Sahni, The Case for a Positive Cosmological Λ-Term, astro-ph/9904398

3. S.M.Carroll, The Cosmological Constant, astro-ph/0004075