Abstrakt: Mit Hilfe der Planck Konstanten Länge, Zeit und Masse wird gezeigt, dass sich eine GUT für die Kosmologie aufbauen lässt. Dieses Papier zeigt wie Einstein's Feldgleichungen in Friedmann Robertson Walker Metrik den Planck Ära Kontext auflösen.

1 Die Planck Konstanten

Planck Länge $\Delta x = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$

Planck Zeit $\Delta t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$

Planck Masse $\Delta m = \sqrt{\frac{hc}{G}}$

2 Moderne Kosmologie

In der modernen Kosmologie werden die Einsteinschen Feldgleichungen mit dem sogenannten kosmologischen Glied Λ wie folgt geschrieben (siehe [2] und [3]):

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} \quad (2.0)$$

Die Lösungen der Feldgleichungen in Friedmann-Robertson-Walker-Metrik lauten dann:

FRW Gleichung (I)

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2} \quad (2.1)$$

FRW Gleichung (II)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad (2.2)$$

Doch Einstein bezeichnete schon zu Lebzeiten das kosmologische Glied Λ als 'die grösste Eselei' seines Lebens. Daher wollen wir uns die Feldgleichung in der ursprünglichen Form von 1917 ansehen (siehe [1]):

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \quad (2.3)$$

Einstein bekam damals die Lösungen wie folgt heraus:

$$\frac{1}{R^2} = 0 \quad (2.4)$$

und

$$\frac{1}{R^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho c^2}{\Delta F} \quad (2.5)$$

Wobei hier die Planck Kraft mit $\Delta F = \frac{c^4}{G}$ gesetzt wird. Einstein nahm damals ein druckfreies Universum an, also einen Energie-Impuls-Tensor gleich:

$$diag\{\rho c^2, 0, 0, 0\} \quad (2.6)$$

Wenn wir aber im Gegensatz zu Einstein ein Universum mit Druck annehmen, dann sieht der Energie-Impuls-Tensor wie folgt aus:

$$diag\{\rho c^2, p, p, p\} \quad (2.7)$$

Daher sieht dann aber die Einsteinsche Lösungsgleichung (2.4) wie folgt aus:

$$\frac{1}{R^2} = 8\pi \frac{p}{\Delta F} \quad (2.8)$$

Der Vergleich mit Lösungsgleichung (2.5) erzwingt folgende Relation:

$$\frac{\rho c^2}{3} = p \quad (2.9)$$

Diese Relation gilt exakt dann, wenn das Universum als ideales Photonengas angenommen wird. Wenn wir die Einsteinsche Feldgleichung der modernen Kosmologie (2.0) in Friedmann-Robertson-Walker-Metrik ohne kosmologisches Glied Λ betrachten und den Geometriefaktor $k = 0$ setzen, dann vereinfachen sich die Gleichungen (2.1) und (2.2) zu:
FRW Gleichung (I)

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (2.10)$$

und FRW Gleichung (II)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad (2.11)$$

Mit der Relation (2.9) wird aus (2.11) wie folgt: FRW Gleichung (II)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{8\pi G\rho}{3} \quad (2.12)$$

3 Weltgleichungen und GUT

Ausschlaggebend für unser Universum sind die 3 Definitionsgleichungen mit den 3 Naturkonstanten c, h, und G für die 3 Planckkonstanten Δt,Δx und Δm wie folgt:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.1)$$

$$h = \frac{\Delta m \Delta x^2}{\Delta t} \quad (3.2)$$

$$G = \frac{\Delta x^3}{\Delta t^2 \Delta m} \quad (3.1)$$

Wenn man nun die Planckzeit Δt durch die Weltzeit t ersetzt und die Planck Länge Δx durch den Weltradius R ersetzt, kann man die Gleichung (3.1) wie folgt umformen:

$$R = ct \quad (3.4)$$

Also ein sich linear expandierendes Universum. Wenn man nun für die Planckmasse Δm die Masse des Universums M einsetzt erhält man aus den Planckschen Relationen den Massenproduktionsterm wie folgt:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{c^3}{G} = \frac{M}{t} \quad (3.5)$$

und die Relation für den Schwarzschildradius des Universum wie folgt:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{c^2}{G} = \frac{M}{R} \quad (3.6)$$

Nun haben wir alle Relationen um die gravitative Beschleunigung unseres Universums auf eine Masse am Weltradius R zu berechnen:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{G\frac{M}{t}t}{c^2t^2} = -\frac{G\frac{c^3}{G}t}{c^2t^2} = -\frac{c}{t} \quad (3.7)$$

Dadurch sind wir in der Lage den Term $\frac{\ddot{R}}{R}$ aus den Friedmann-Robertson-Walker-Gleichungen wie folgt auszurechnen:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{\frac{c}{t}}{ct} = -\frac{1}{t^2} = -\frac{8\pi G\rho}{3} \quad (3.8)$$

oder umgeformt zu:

$$\rho = \frac{3}{8\pi Gt^2} \quad (3.9)$$

Wesentlich ist nun, dass der Druck $p = \frac{\Delta F}{R^2}$ oder gleich Energiedichte $\epsilon = \frac{Mc^2}{R^3}$ oder gleich der Gravitationsenergiedichte in einem Neutronenstern $\epsilon = \frac{GM^2}{R^4}$ ist. Wenn wir nun alle drei Relationen gleich setzen, dann erhalten wir:

$$\frac{\Delta F}{R^2} = \frac{Mc^2}{R^3} = \frac{GM^2}{R^4} \quad (3.10)$$

Die Relation (3.10) hält nur, wenn $R = ct$ und die Masse des Universums $M = \frac{c^3}{G}t$ ist (siehe 3.4 und 3.5). Mit der Gleichung (3.9) und der Relation (2.9) erhalten wir dann für den Druck p wie folgt:

$$p = \frac{c^2}{8\pi Gt^2} \quad (3.11)$$

Dadurch kännen wir nun die Kraft auf den Rand unseres Universums wie folgt ausrechnen:

$$F = pA = \frac{c^2}{8\pi Gt^2}4\pi R^2 = \frac{\Delta F}{2} \quad (3.12)$$

Das heisst, der Druck bildet die halbe Planckkraft Komponente und die Dichte ρ die andere Hälfte die notwendig ist um die volle Planckkraft ΔF zu erreichen die ein Bestandteil der ART ist (siehe 2.5).

4 Zusammenfassung

1. Nur dann wenn der Weltradius R proportional zur Weltzeit t (siehe 3.4) und die Masse des Universums M proportional zur Weltzeit t ist (siehe 3.5), dann können die Relationen aus (3.10) und damit die Allgemeine Relativitätstheorie erfüllt werden.

2. Insbesondere ist das Universum zu jeder Zeit ein ideales 'Schwarzes Loch' wie folgt: $\frac{GM}{c^2} = R$ (4.1).

3. Ausserdem ist weder das kosmologische Glied Λ von Nöten als auch der Geometriefaktor $k = 0$ welches einer euklidischen Geometrie entspricht.

Abschliessend sei gesagt, dass die 3 Definitionsgleichungen (3.1) bis (3.3) die Weltgleichungen der Kosmologie im Sinne einer GUT darstellen und dass aus ihnen alle Relationen abgeleitet werden können:

$$G = \frac{\Delta x^3}{\Delta t^2 \Delta m} = \frac{1}{\Delta t^2 \rho} \quad (4.2)$$

oder umgeformt:

$$\rho \sim \frac{1}{Gt^2} \quad (4.3)$$

siehe auch (3.9)

5 Referenzen

1. A.Einstein, Sitz. Preuss. Akad. d. Wiss. Phys.-Math 142 (1917)

2. V.Sahni, The Case for a Positive Cosmological Λ-Term, astro-ph/9904398

3. S.M.Carroll, The Cosmological Constant, astro-ph/0004075